

Aula 17-Anuidade com pagamentos certos

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

➤ Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial I, oferecida pelo curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia/ciências atuariais da Universidade Federal de Alfenas- Campos varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L,H. Anuidades com pagamentos certos. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia, Alfenas, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>. Acessado em: 28 jun. 2026.

			Fracionadas		Contínuas
Imediata	Vitalícia	Antecipada	$\ddot{a}_x$	$\ddot{a}_x^{(m)}$	$\bar{a}_x$
		Postecipada	a_x	$a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }$	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}$	$\bar{a}_{x:\overline{n} }$
		Postecipada	$a_{x:\overline{n} }$	$a_{x:\overline{n} }^{(m)}$	
Diferida	Vitalícia	Antecipada	$m \ddot{a}_x$	$k \ddot{a}_x^{(m)}$	$m \bar{a}_x$
		Postecipada	$m a_x$	$k a_x^{(m)}$	
	Temporária	Antecipada	$m \ddot{a}_{x:\overline{n} }$	$k \ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}$	$m \bar{a}_{x:\overline{n} }$
		Postecipada	$m a_{x:\overline{n} }$	$k a_{x:\overline{n} }^{(m)}$	

Resultados importantes

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq \bar{a}_x \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^{1:\overline{n}}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}$$

$$A_{x:\overline{n}|} + iA_{x^{1:\overline{n}}|} + ia_{x:\overline{n}|} = 1$$

$$1 = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x$$

$$1 = \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente m parcelas para o segurado ou outrem e, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

Caso o segurado morra antes do tempo m a seguradora precisa ter o valor presente necessário a m pagamentos .

Caso o segurado morra após m anos, a seguradora deverá ter o necessário a pagar os m pagamentos mais anuidades vitalícias descartado os pagamentos já efetuados.

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

Fluxo de caixa antecipado

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{m}|}} = \sum_{t=0}^{m-1} \ddot{a}_{\overline{m}|} P(T_x = t) + \sum_{t=m}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} P(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{m}|}} = \ddot{a}_{\overline{m}|} ({}_m q_x) + \sum_{t=m}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} {}_t p_x q_{x+t}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

Fluxo de caixa antecipado

$$\ddot{a}_{\overline{x:m}|} = \ddot{a}_{\overline{m}|}({}_m q_x) + \sum_{t=m}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} {}_t p_x q_{x+t}$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:m}|} = \ddot{a}_{\overline{m}|} + \sum_{t=m}^{\omega-x} v^t {}_t p_x = \ddot{a}_{\overline{m}|} + \ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{x:m}|}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

Fluxo de caixa postecipado

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ a_{\overline{T_x}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$a_{\overline{x:\overline{m}|}} = a_{\overline{m}|} + a_x - a_{x:\overline{m}|}$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

Anuidade contínua

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t) dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{T_x}|} f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \int_0^m \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} {}_t p_x \mu(x + t) dt + \int_m^\infty \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} {}_t p_x \mu(x + t) dt$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t) dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_{T_x}(t) dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \bar{a}_{\overline{m}|} {}_m q_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

EXEMPLO 1: Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente 30 parcelas para o segurado ou seus dependentes, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

Calcule o prêmio puro único para esse produto considerando que o segurado tenha o seu tempo de vida adicional modelado por:

$$f_{T_x}(t) = 0,016e^{-0,016t} \text{ para } t > 0.$$

E considere também $\delta = 0,10$ e o benefício unitário.

EXEMPLO 1

Lembrando que ${}_m q_x = F_{T_x}(m)$, temos que:

$${}_m q_x = 1 - e^{-0,016m}$$

Assim:

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \frac{(1 - e^{-\delta m})}{\delta} {}_m q_x + \int_m^{\infty} \frac{(1 - e^{-\delta t})}{\delta} {}_t p_x \mu(x + t) dt$$

Tem-se:

$$\bar{a}_{x,\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + \int_{30}^{\infty} \frac{(1 - e^{-0,1t})}{0,1} 0,016 e^{-0,016t} dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + 0,16 \int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t} dt$$

EXEMPLO 1

...

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = \frac{(1 - e^{-0,1(30)})}{0,1} (1 - e^{-0,016(30)}) + 0,16 \int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t} dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = (9,502)(0,3812) + 0,16 \left[-\frac{1}{0,016e^{0,016t}} + \frac{1}{(0,116)e^{t(0,116)}} \right]_{t=30}^{t \rightarrow \infty}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} = (9,502)(0,3812) + 0,16 \left(\frac{1}{0,016e^{0,016(30)}} - \frac{1}{(0,116)e^{(30)(0,116)}} \right)$$

$$\bar{a}_{x:\overline{30}|} \approx 9,85$$

Lembrando que

$$\bar{a}_x = 8,62$$

Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para m anos.

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} {}_m q_x + \int_m^{\infty} \bar{a}_{\bar{t}|} {}_t p_x \mu(x + t) dt$$

...

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} + \int_m^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt$$

$$\bar{a}_{x,\overline{m}|} = \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} + {}_m| \bar{a}_x$$

Anuidades com benefício crescente



Anuidades com benefício crescente

Os benefícios pagos variam segundo uma progressão aritmética.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

em que a_1 é termo inicial e r é a razão.

Anuidades com benefício crescente

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_t|\ddot{a}_x$$

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_t|a_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|\ddot{a}_{x:\overline{n-t}|}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t|a_{x:\overline{n-t}|}$$

$$(\bar{I}a)_x = \int_0^{\infty} te^{-\delta t} {}_tp_x dt$$

$$(\bar{I}a)_{x:\overline{n}|} = \int_0^n te^{-\delta t} {}_tp_x dt$$

$$(IA)_x = v(I\ddot{a})_x - (Ia)_x$$

Exemplo 2: Calcule os valores atuariais para as anuidades com pagamentos antecipado (postecipado), que sejam adquiridas por pessoas de 40 anos de idade. Considere a tábua de vida AT-2000 Masculina, taxa de juros de 5% ao ano, cobertura de 3 anos e benefício crescente.

Solução:

Solução:

$$(I\ddot{a})_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^2 {}_t|\ddot{a}_{40:\overline{3-t}|} = \ddot{a}_{40:\overline{3}|} + {}_1|\ddot{a}_{40:\overline{2}|} + {}_2|\ddot{a}_{40:\overline{1}|} \approx 5,618$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^2 v^t {}_tp_{40} \approx 2,845$$

$$(Ia)_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^2 {}_t|a_{40:\overline{3-t}|} = a_{40:\overline{3}|} + {}_1|a_{40:\overline{2}|} + {}_2|a_{40:\overline{1}|} \approx 5,343$$

$$a_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=1}^3 v^t {}_tp_{40} \approx 2,697$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.

